Zahlentheorie

July 20, 2023

Contents

Chapter 1

Elementare Zahlentheorie

1.1 Primzahlen und Teilbarkeit

In diesem Abschnitt werden wir die "Teilt"-Relation kennenlernen und genauer untersuchen, ggt, kgv sowie Primzahlen definieren. Das Hauptresultat des Abschnittes ist die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.

1.1.1 Teilbarkeit

Definition 1 Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Wir sagen, $a \mid b$ (in Worten "a teilt b"), genau wenn eine ganze Zahl x existiert so, dass gilt $a \cdot x = b$. (In Formeln: $a \mid b :\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : a \cdot x = b$.)

Lemma 1 Die Relation $\mid$ ist eine Ordnungsrelation. Das bedeutet:

(i) Jede Zahl teilt sich selbst. (Reflexivität)

(ii) Wenn für zwei Zahlen a, b gilt, dass $a \mid b$ teilt und $b \mid a$ teilt, dann gilt $a = b$. (Antisymmetrie)

(iii) Wenn für drei Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt: $a \mid b$ und $b \mid c$ dann folgt $a \mid c$. (Transitivität)

Aufgabe 1 MO-Aufgabe 050623: (5/6) Gesucht ist eine natürliche Zahl b, die folgenden Bedingungen genügt:

1. $40 < b < 600$,
2. b ist sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar,
3. b ist nicht durch 8 und nicht durch 27 teilbar,
4. b lässt bei der Division durch 11 den Rest 6

Wie viele solche Zahlen gibt es?

Aufgabe 2 MO-Aufgabe (7/8) 170722

1. Beweise: Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar!
2. Untersuche, ob auch die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch 6 teilbar ist!
3. Ermittle eine weitere natürliche Zahl n ($n > 6$), für die gilt: Die Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch n teilbar!

Lemma 2 Es gilt für alle Zahlen $a, b, c, m, n \in \mathbb{Z}$ Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$ gilt, dann folgt $a \mid mb + nc$

Definition 2 Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ definiere $ggt(a, b)$ als die größte Zahl, die sowohl a als auch b teilt.
(In Formeln: $ggt(a, b) := \max\{t \in \mathbb{Z} : t \mid a \wedge t \mid b\}$.
$ggt(a, b))$ heißt größter gemeinsamer Teiler von a und b.

Aufgabe 3 (5/6/7) MO-Aufgabe 210723: Ermittle alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a und b mit $0 < a < b$, deren größter gemeinsamer Teiler 15 und deren Produkt 7875 ist!

Aufgabe 4 (8) MO-120832: Beweise den folgenden Satz: Sind a, b, c mit $(a \geq b \geq c)$ drei beliebige natürliche Zahlen, dann ist die Summe dieser Zahlen oder eine der aus zwei dieser Zahlen gebildeten Differenzen durch 3 teilbar.

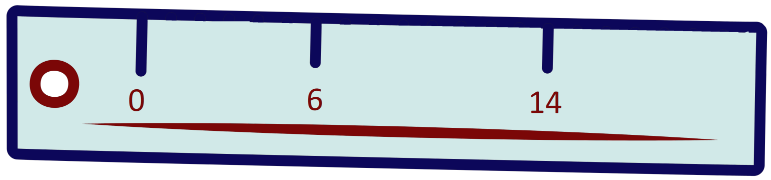
Aufgabe 5 (sehr schwer) Zeige nur mit den bisher aufgeführten Definitionen, Sätzen und Lemmata, dass für zwei beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ für alle Zahlen $t \in \mathbb{Z}$ mit $t \mid a$ und $t \mid b$ gilt, dass

$$t \mid ggt(a, b).$$

Satz 1 (Division mit Rest) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b > 0$. Dann gibt es eindeutige Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < b$ und

$$a = qb + r$$

Aufgabe 6 Gregorys Lineal ist schon sehr alt. Man kann nur noch die 0 und zwei andere Zahlen und die dazugehörigen Markierungen erkennen.



(a) Er muss für seine Hausaufgaben eine 4 cm lange Strecke zeichnen. Ist das möglich? Begründe deine Antwort.
Wenn du magst, bastle selbst so ein Lineal und versuche, damit eine 4 cm Strecke zu zeichnen.

(b) Kann Gregory mit seinem Lineal Strecken mit beliebiger ganzzahliger Länge zeichnen? Begründe deine Antwort.

(c) Würde sich deine Antwort ändern, wenn neben der 0 statt der 6 und der 14 zwei andere natürliche Zahlen auf dem Lineal zu erkennen wären? Formuliere Regeln und begründe diese!

(d) (7/8) Recherchiere den euklidischen Algorithmus und stelle eines Bezug von Algorithmus und der Aufgabe her.

Aufgabe 7 (8+) MO 061041:Man beweise: Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl

$$m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$$

durch 30 teilbar.

Lemma 3 Rechenregeln fürs ggt: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

1. $ggt(a, b) = ggt(b, a)$,
2. $ggt(a, b) = ggt(a, b - qa)$,
3. Sei $g := ggt(a, b)$ Dann gilt: $ggt(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}) = 1$.

Satz 2 (Lemma von Bezout)
Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$.

1. Dann gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit
$$ggt(a, b) = ax + by$$
2. für alle $u, v \in \mathbb{Z}$ gilt
$$ggt(a, b) \mid au + bv$$

1.2 Primzahlen und der Fundamentalsatz der Arithmetik

Definition 3 Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt genau dann Primzahl, wenn 1 und p die einzigen positiven Teiler von p sind.

Lemma 4 Sei p eine Primzahl. Seien a, b ganze Zahlen. Falls $p \mid ab$; so folgt $p \mid a$ oder $p \mid b$:

1.2.1 Beweis des Hauptsatzes

Satz 3 Sei n eine natürliche Zahl mit $n > 2$ Dann lässt sich n als Produkt von Primzahlen schreiben. Diese Darstellung als Produkt aus Primzahlen ist eindeutig (bis auf die Reihenfolge).

1.2.2 Aufgaben Tag 2

Hier eine Aufgabensammlung für den zweiten Tag. Beschäftigt euch bitte mit zwei der Aufgaben bis heute Nachmittag. Dann besprechen wir sie.

Aufgabe 8 Bestimmt $ggt(8174, 4757)$. Dann findet $x, y \in \mathbb{Z}$ so, dass gilt:

$$ggt(8174, 4757) = x * 8174 + y * 4757$$

.

Aufgabe 9 (5/6/7) MO-Aufgabe 010614: Kann eine Summe von vier beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen (z. B. 11, 12, 13, 14 oder 27, 28, 29, 30) eine Primzahl sein? Begründe die Antwort!

Definition 4 Eine Primzahl der Form $2^n - 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ heißt Mersenne-Primzahl.

Aufgabe 10 (7/8) MO 100834 Zeige: Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $2^n - 1$ eine Primzahl, so auch n.
Dann entscheide, ob auch die Umkehrung gilt.

Aufgabe 11 (8) Es seien a, b natürliche Zahlen, und es gelte a > b.Gib für a und b Bedingungen an, sodass folgendes gilt: Die Differenz der Quadrate von a und b ist genau dann eine Primzahl, wenn diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind!

Aufgabe 12 (9+) MO-Aufgabe 041043: Beweisen Sie folgende Behauptung! Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

Und noch einmal die Aufgbe von vorhin:

Aufgabe 13 (8+) MO 061041:Man beweise: Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl

$$m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$$

durch 30 teilbar.

Man kann Sie sehr schön mittels des kleinen Satzes von Fermat beweisen: Dieser sagt : Sei $a \neq 0$ eine ganze Zahl und p eine Primzahl, so dass p kein Teiler von a ist.. Dann ist

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

1.3 Tag 3

Schreibt in den Chat, über welches Thema ihr am liebsten etwas lernen möchtet:

- Komplexe Zahlen
- Ringtheorie, Modulo, (Eulersche $phi - Funktion$)
- Induktion, kleiner fermatscher Satz

1.4 Aufgaben Tag 3

1.4.1 Allgemeine Aufgaben

Aufgabe 14 MO- Aufgabe (5/6/7) 330631: Finde alle Möglichkeiten, drei natürliche Zahlen a, b, c so zusammenstellen, dass a + b + c = 12 und c - b = 3 gilt! Hinweis: 1. Die Null soll hier auch als natürliche Zahl bezeichnet werden. 2. Es wird auch zugelassen, dass sich unter den Zahlen a, b, c solche befinden, die einander gleich sind.

Aufgabe 15 Aufgabe 160735: Ermittle alle Paare (x; y) natürlicher Zahlen, für die die Gleichung 2x + 3y = 27 erfüllt ist!

1.4.2 Modulo

Aufgabe 16 Beweise: Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre Alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Aufgabe 17 Aufgabe 041015: Die Zahl 2^{3217}?1 wurde als Primzahl ermittelt.

1. Stellen Sie fest, wieviel Stellen diese Zahl hat!
2. Wie lautet die letzte Ziffer dieser Zahl?

1.4.3 Komplexe Zahlen

Aufgabe 18 Seien $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 - i$ beides komplexe Zahlen. Berechne:

1. $z_1 + z_2$,
2. $z_1 - z_2$,
3. $z_1 \cdot z_2$,
4. $|z_1|$,
5. z_1/z_2

Aufgabe 19 (Nach einer Aufgabe in "Problem Solving" von Arthur Engel) Eine Schatzkarte enthält folgendes: Auf der Schatzinsel, beginne am Turm, gehe zur Ulme und zähle die Schritte. Dann drehst du dich um 90 Grad nach links und gehst die gleiche Anzahl von Schritten bis zu Punkt A. Gehe wieder vom Turm zum Feigenbaum und zähle die Schritte. Dann drehst du dich um 90 Grad nach rechts und gehst die gleiche Anzahl von Schritten bis zum Punkt B. In der Mitte von A und B ist ein Schatz vergraben. Ein Mann ging auf die Insel und fand die Ulme EU und den Feigenbaum F . Aber der Turm konnte nicht gefunden werden. Finde den Punkt des Schatzes.

Chapter 2

Polynome

Definition 5 Ein Polynom ist ein Ausdruck der Form

$$p := a - 0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

wobei $a_0, ..a_n$ aus einem vorher vorgegebenen Zahlbereich kommen und Koeffizienten genannt werden, n eine natürliche Zahl ist, die man den Grad des Polynoms nennt, und x ein über dem Zahlbereich der Koeffizienten transzendentes Element ist (stellt euch hier x erst einmal als Variable vor, das Wort transzendent füllen wir später mit Leben). Zu jedem Polynom

$$p := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

gehört die Polynomfunktion $\tilde{p}$, die jeder Zahl z die Zahl

$$\tilde{p}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$

zuordnet.

Definition 6 Sei K eine der bekannten Zahlenmengen ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Dann heißt ein Element a algebraisch über K, wenn es ein Polynom p mit $p \neq 0$ über K gibt, so, dass $\tilde{p}(a) = 0$ ist (also a Nullstelle der Polynomfunktion $\tilde{p}$ ist.) Elemente, die nicht algebraisch über K sind, heißen transzendent über K.

Aufgabe 20 Findet algebraische, und transzendente Elemente über ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$)!

2.1 Exkurs: Mächtigkeit

Definition 7 Zwei Mengen A, B heißen gleichmächtig, wenn eine Bijektion von A nach B gibt. (Das ist eine Abbildung, die jedem Element von A so genau ein Element von B zuordnet, dass jedes Element von B genau einmal getroffen wird). Man schreibt dann

$$|A| = |B|.$$

Wir schreiben außerdem $|A| \leq |B|$, wenn es eine Injektion von A nach B gibt ((Das ist eine Abbildung, die jedem Element von A so genau ein Element von B zuordnet, dass jedes Element von B höchstens einmal getroffen wird).

Aufgabe 21 1. Gebt Paare A, B von Mengen an, für die $|A| = |B|$ gilt.

2. Gebt Paare A, B von Mengen an, für die $|A| \leq |B|$ gilt.

Satz 4 Satz von Cantor-Schröder-Bernstein. Wenn für zwei Mengen A und B gilt, dass $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$, dann folgt $|A| = |B|$.

Der Beweis ist nicht ganz einfach - man muss aus den zwei Injektionen eine Bijektion basteln. Wir führen ihn hier nicht, versucht es gern einmal selber!

Satz 5 Es gibt nur Abzählbar viele Polynome mit rationalen Koeffizienten.

Satz 6 Es gibt nur abzählbar viele algebraische Zahlen.

Satz 7 seien $a, b \in \mathbb{R}$. Sei

$$p :=$$

Aufgabe 22 Zeige, dass es keine ganzen Zahlen a, b, c gibt mit

$$a^2 + b^2 - 8c = 6$$

Aufgabe 23 Zeige, dass es keine natürlichen Zahlen a,b,c gibt mit

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$$

Aufgabe 24 Finde alle reellen Lösungen der Gleichung

$$x^4 - 4x = 1$$

Aufgabe 25 Finde alle reellen Lösungen der Gleichung

$$(x + 1)(x^2 + 1)(x^3 + 1) = 30x^3$$

Aufgabe 26 Zeige, dass für jede natürliche Zahl m die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 2xy - mx - my - m - 1 = 0$$

genau m Lösungen (x,y) hat bei denen x und y natürliche Zahlen sind.

Aufgabe 27 Zeige, dass für keine natürliche Zahl n der Ausdruck

$$n^2 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$$

das Quadrat einer natürlichen Zahl sein kann.

Aufgabe 28 Zeige, dass

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

genau eine Lösung in natürlichen Zahlen hat.