Schuljahr 2024/25

Aufgabenzirkel Wettbewerbstraining

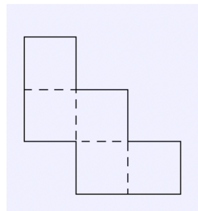
Manche Leute, denken, gut in Mathe zu sein, hat vor allem mit Talent zu tun und nicht wenige haben die Meinung, "Mathe kann man halt einfach, oder nicht." Und bestimmt fällt es einigen Schülerinnen und Schülern leichter, neue Sachen im Matheunterricht zu verstehen als anderen.
Aber auch der mit einer Körpergröße von 2,21 m, einer außerordentlichen Geschicklichkeit und Kraft, fürs Basketballspielen bestens geeignete Victor Wembanyama muss(te), um ein exzellenter Basketballspieler zu werden, Dribbeln, Werfen, Taktik,... oder kurz: Basketball trainieren.
Und auch für die Matheolympiade hilft es insofern natürlich sehr, regelmäßig zu trainieren. Dazu gibt es von uns mehrere Angebote.

1. In unseren *online Wettbewerbstrainings* lernst du in einer Gruppe zusammen mit anderen Matheinteressierten Schüler:innen von MO-erfahrenden Trainer:innen durch das gemeinsame Lösen von Aufgaben hilfreiche Tricks und Techniken.

2. Auf der Seite der Matheolympiade finden sich (fast) alle Aufgaben der letzten 64 Olympiaden (also ganz schön viele): `https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/aufgaben/aufgabenarchiv-2?view=aufgabenarchiv` Scrollst du dort runter, findest du einen weiteren Link, unter dem sich zu vielen älteren Aufgaben sogar die Lösungen finden. Ideal um selbstständig zu trainieren!

3. Auf den nächsten Seiten in diesem Dokument findest du weitere Trainingsaufgaben. Diese sollen dir helfen, das ordentliche und schnelle Aufschreiben von Lösungen zu trainieren. Denn bei der MO wird sehr viel Wert darauf gelegt, dass die Teilnehmenden ihre Lösungen verständlich und nachvollziehbar aufschreiben. Wenn du magst, suche dir maximal drei der Aufgaben aus und schicke bis zum 07.02. deine Lösungen an tobias.sohr@uni-flensburg.de. Eine Woche später bekommst du dann Feedback zu deinem Aufschrieb. Probiere am besten eine Aufgabe jeweils ohne Hilfen und in ca. 45 zu lösen und aufzuschreiben, denn das ähnelt den Bedingungen bei der Landesrunde. Die Aufgaben sind grob nach Altersgruppen sortiert, die ersten sind eher für Klassen 5 und 6 und die letzte ist für sehr ambitionierte Oberstufenschüler:innen. Schwierigkeit ist aber immer subjektiv und du lernst am meisten, wenn du dir Aufgaben auswählst, die für dich herausfordernd aber nicht unmöglich sind.
   Die Aufgaben sind oft (teils abgewandelte) alte MO-Aufgaben oder (teils abgewandelte) Aufgaben auf dem Buch "Problem Solving Stretegies" von Engel.

Aufgabe 1 (Nach MO 230522): Mit 12 gleichlangen Hölzchen sollen Begrenzungen von Flächen gelegt werden. Es sind jedesmal alle 12 Hölzchen für eine Fläche zu verwenden. Außerdem dürfen benachbarte Hölzchen nur gestreckte oder rechte Winkel bilden. Die Abbildung zeigt als Beispiel eine solche Fläche, die einen Inhalt von 5 Flächeneinheiten besitzt.



(Als Flächeneinheit gilt der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge eines Hölzchens.) Zeichne jeweils eine solche Fläche mit einem Flächeninhalt von a) 6 Flächeneinheiten, b) 7 Flächeneinheiten, c) 8 Flächeneinheiten, d) 9 Flächeneinheiten! Kannst du nach den Regeln Flächen mit anderen Inhalten bilden?

Aufgabe 2 (a) Wie viele Menschen müssen mindestens in einem Raum sein, damit sicher drei von Ihnen am selben Tag Geburtstag haben?

(b) In einen riesigen Konferenzsaal sind 2025 Personen. Für welche Zahlen n kann man sicher sagen: Es gibt n Personen in dem Raum, die am selben Tag Geburtstag haben?

Aufgabe 3 (nach MO 010524) Aus einem Holzbrettchen von der Länge $a = 60cm$ und der Breite $b = 15cm$ sollen 12 kleine Brettchenvon der Größe $5cm$ mal $15cm$ ausgesägt werden. Lutz bemüht sich, mit möglichst wenig Sägeschnitten auszukommen.

1. Wie viele Schnitte muss er mindestens durchführen? (Das Sägen 'im Paket' soll dabei nicht gestattet sein.) Wie viel Zentimeter beträgt der Sägeweg?
2. Wie ändert sich die Schnitteanzahl, wenn man auch 'im Paket' Sägen darf?

Aufgabe 4 (Nach MO 100722) In einem Dreieck ΔABC seien die Größe der Innenwinkel wie üblich mit α, β, γ bezeichnet und es gelte $\alpha = 60^\circ$. Sei B' der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ und AB. Sei C' der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ACB$ und AB. Zeige, dass die Summe der Größen von $\angle AB'B$ und $\angle AC'C$ gleich 180° ist.

Aufgabe 5 (nach MO 310832) Bei einem Schachturnier spielen 6 Spielerinnen mit. Jede spielt gegen jede andere genau eine Partie. Es git für einen Sieg 1 Punkt, für ein Unentschieden $\frac{1}{2}$ Punkt und für eine Niederlage 0 Punkte.

(a) Finde die größtmögliche Punktzahl, die die Letztplazierte erreichen kann.

(b) Finde die größtmögliche Punktzahl, die die Letztplazierte erreichen kann, wenn alle Spielerinnen unterschiedlich viele Punkte haben.

Aufgabe 6 Robin Hood bringt seinem Freund Little John Bogenschießen bei. Während Robins Pfeile natürlich immer genau da landen, wo er hinzielt, kann John lange nicht so gut zielen (dafür ist John deutlich besser in Mathe). Nach einiger Zeit erfolglosen Trainings schlägt John Robin folgendes Spiel vor: "Robin, ich schieße jetzt auf eine Zielscheibe, die ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge 2 Metern ist. Ich werde zwar nicht wie du immer genau die Mitte treffen, aber ich wette mit dir, wenn ich fünf mal die Zielscheibe treffe, dass es dann zwei meiner Pfeile gibt, die höchstens 1m voneinander entfernt stecken."

(a) Wer gewinnt die Wette?

(b) Wenn John statt mit 5 eine ähnliche Wette mit 17 Treffern anbieten würde, welche Distanzen zwischen den Pfeilen könnte er dann nennen, um sicher zu gewinnen?

Aufgabe 7 (MO 110823 - Der Südpolsatz) Beweise, dass für jedes Dreieck ΔABC gilt: Ist S der von C verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit dem Umkreis des Dreiecks ΔABC, dann liegt S auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.

Aufgabe 8 Kann eine Zahl, die als Ziffern ausschließlich einige Nullen und genau 600 Sechsen hat, eine Quadratzahl sein?

Aufgabe 9 Zeige, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ gilt, dass $-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$.

Aufgabe 10 Ihr kennt bestimmt die Fibonaccifolge (1,1,2,3,5,8,13,...). Die ersten beiden Folgeglieder sind 1 und 1, jedes weitere ist die Summe der beiden vorherigen.

(a) Jetzt betrachten wir die Folge der Einerziffern der Fibonaccizahlen. Beweise, dass diese periodisch ist.

(b) Beweise, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Fibonaccizahl mit mindestens n Nullen am Ende gibt.

Aufgabe 11 (Nach MO 301035) Untersuche, ob es eine Menge von 2025 verschiedenen natürlichen Zahlen gibt, die die folgenden Eigenschaften hat:

1. Keine der Zahlen in der Menge hat einen Primfaktor größer als 31.
2. Kein Produkt von zwei verschiedenen Zahlen aus der Menge ist eine Quadratzahl.

Aufgabe 12 (Nach MO 031232) Beweise folgenden Satz: Ein Dreieck mit Innenwinkeln α, β, γ ist genau dann rechtwinklig, wenn gilt: $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = -1$.

Aufgabe 13 Zeige, dass für alle $a, b, c \in [0, 1]$ gilt, dass:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

In der Fußnote[1] findet sich ein kleiner Hinweis.

[1] Hinweis: *Benutzekonvexitätvonfunktionen*